FGN, An 1 | **Développement asymptotique de H_n** | L 223, L 224, L 230, L 219, L 229

Th : On considère la série harmonique définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

alors $\exists \gamma > 0$ tq $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Démonstration : ① $\forall k \geq 2$, on a $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{k+1}$,

d'où $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt \geq \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$.

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \geq H_n - 1 \geq \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,dt$$

puis $\ln(n) + 1 \geq H_n \geq \ln(n+1) - \ln(2) + 1 \geq \ln(n)$

d'où $1 + \frac{1}{\ln n} \geq \frac{H_n}{\ln n} \geq 1$

Ainsi, par encadrement, $\frac{H_n}{\ln n} \to 1$ ie $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

② On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$

Ainsi (u_n) est décroissante.

D'autre part, d'après les inégalités précédentes, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1 - \ln(2)$

D'après le th des suites monotones, (u_n) converge.

On pose $\gamma \geq 1 - \ln(2)$ sa limite ($\gamma \simeq 0,577$)

alors on a : $u_n = \gamma + o(1)$,

ie $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

③ On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma$.

alors $\forall n \geq 2$, $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d'où : $v_n - v_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, avec $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} < 0$

D'après le th de sommation des équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k - v_{k-1} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

Or par comparaison série / intégrale, $\sum_{k=n+1} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$

d'où par télescopage : $-v_n \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ puis $v_n \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

ainsi, $v_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ puis $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

④ On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$.

Comme précédement, on a $\forall n \geq 2$,

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-n)^2} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}.$$

$$= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

d'où $w_n - w_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3}$.

puis comme précédement : $-w_n \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ puis $w_n \sim \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^2}$

Finalement, $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$